数理解析研究所講究録
140巻 1972年 209-237



# 多値論理関数の分解としきい値回路網への応用

三根　久[*]　藤田志郎[**]
([*]京都大学工学部数理工学教室)
([**]川崎医科大学)

# Decomposition of multi-valued logical functions and its application to threshold networks

Hisashi Mine[*]　Shiro Fujita[**]
([*]Faculty of Engineering, Kyoto University)
([**]Kawasaki Medical College)

## 1. 序　　論

まず前半において，Ashenhurst, Hu らによって発展させられた二値論理関数の分解についての理論[(1),(10)]を多値論理の場合へ拡張することを試みる。

ついで後半においては，この拡張された理論を用いて，任意の論理関数を最小のしきい値素子を用いて実現する手法を述べる。

最後に，三値論理関数の最小しきい値素子実現についての二，三の例題を述べる。

## 2. 関数の分解

以下とくにことわりのない限り，関数といえば，$m$値論理関数を表わす。そして，$m$個の真理値を整数値 0, 1, 2, ‥‥, $m-1$ で表わす。

［定義 1］ 関数 $f(x)=f(x_1, x_2, \cdots x_n)$ が いくつかのより簡単な関数 $g_1, g_2, \cdots g_k$ の合成関数として表わされるとき，これを $f(x)$ の分解といい，$g_i\ (1 \leq i \leq k)$ を成分関数という。

ただし，各 $g_i$ を表わす素子でもって $f(x)$ を回路実現したとき，feed-back loop をもたないものとする。

（例 1） 三値論理関数 $f(x_1, x_2)$ がつぎのように与えられているとする。

| $f$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $x_1$ 0 | 0 | 1 | 2 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |
| 2 | 1 | 1 | 1 |

（列: $x_2$）

$\vee(x_1, x_2) = \max(x_1, x_2)$

$\wedge(x_1, x_2) = \min(x_1, x_2)$

$\oplus$ = sum modulo 3

とすると，$f(x_1, x_2)$ はつぎのような分解をもつ。

$$f(x_1, x_2) = \wedge\{\vee(x_1, x_2),\ \oplus[x_1,\ \vee(x_1, x_2)]\}$$

$\vee$，$\oplus$，$\wedge$ が成分関数であり，これらを素子とした $f(x_1, x_2)$ の回路実現は Fig. I に与えられている。

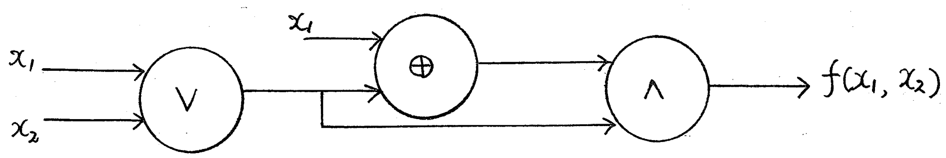


Fig. I

［定義 2］ $n$ 個の変数の集合 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ に対して，

$$Y = \{y_1, y_2, \cdots, y_p\} \qquad (y_i \in X,\ i = 1, 2, \cdots, p)$$

$$Z = \{z_1, z_2, \cdots, z_q\} \qquad (z_i \in X,\ i = 1, 2, \cdots, q)$$

を $X$ の分割といい

$$Y \mid Z = y_1, y_2, \cdots, y_p \mid z_1, z_2, \cdots, z_q$$ と記す。

ここで，$Y \cup Z = X$ であり，$x_i\ (1 \leq i \leq n)$ が同時に $Y$，$Z$ に含まれていてもよい。また，$2 \leq q \leq n$，$0 \leq p \leq n$ とする。$p$ を第一次数，$q$ を第二次数という。

明らかに，$p + q \geq n$ であるが，

$$r = (p + q) - n$$

を分割の重複度という。$r=0$ のとき，分割 $Y|Z$ は disjunctive であるという。

〔定義3〕 関数 $f(x)=f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ について，$X$ の一つの分割を $Y|Z = y_1, y_2, \cdots, y_p \mid z_1, z_2, \cdots, z_q$ とする。

このとき，つぎの二つの関数

$$\phi=\phi(y_1, y_2, \cdots, y_p, \psi) \quad , \quad \psi=\psi(z_1, z_2, \cdots, z_q)$$

があり，

$$f(x) = \phi\{y_1, y_2, \cdots, y_p, \psi(z_1, z_2, \cdots, z_q)\}$$

となるとき，$\phi$ と $\psi$ は分割 $Y|Z$ に関して，$f(x)$ の単分解を表わすといい，記号的に $(\phi, \psi)$ とかく。このとき，$f(x)$ 自身も一つの単分解と考えておく。

$r=(p+q)-n$ は単分解の重複度ともいい，$r=0$ ならば，単分解は disjunctive であるという。

二値論理関数の分解に関しては "Reduction Theorem" として知られている定理があるが，これは一般に，多値論理関数についても成立するので，定理として述べておく。[2]

〔定理1〕 任意の関数 $f(x)$ に対して，$k+1$ 個の成分関数をもった分解が与えられているとする。それらを，$\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_k, \phi_k$ とする。

このとき，この分解は $k$ 個の単分解の系列

$$(\phi_i,\ \psi_i) \qquad (i=1,2,\cdots,k)$$

の合成として表わしうる。

この定理によれば，$f(X)$ に対する $k+1$ 個の成分関数をもった分解Dがあれば，単分解の系列

$$(\phi_1,\psi_1),\ (\phi_2,\psi_2),\ \cdots,\ (\phi_k,\psi_k)$$

が存在して，Dはこれらの合成として表わしうる。

ただし，$\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_k,\ \phi_k$ は分解Dの $k+1$ 個の成分関数である。

この単分解の合成を，記号的に，

$$D=(\phi_k,\psi_k)\circ(\phi_{k-1},\psi_{k-1})\circ\cdots\circ(\phi_2,\psi_2)\circ(\phi_1,\psi_1)$$

と記す。

（例2）例1における関数の分解を考える。

まず，$\psi_1(x_1,x_2)=\vee(x_1,x_2)$ とする。このとき

$$f(x_1,x_2)=\phi_1\{x_1,\ \psi_1(x_1,x_2)\}$$ となり，

これは単分解 $(\phi_1,\psi_1)$ を表わす。

つぎに，$\psi_2=\oplus(x_1,\psi_1)$，$\phi_2=\wedge(\psi_1,\psi_2)$ とすると，$\phi_1=\phi_2(\psi_1,\psi_2)$ となる。

これは単分解 $(\phi_2,\psi_2)$ を表わす。

ゆえに，分解Dは

$$D=(\phi_2,\psi_2)\circ(\phi_1,\psi_1)$$ となる。

関数 $\phi_{i-1}$ の単分解 $(\phi_i, \psi_i)$ の第一，二次数を $p_i$, $q_i$ $(i=1, 2, \cdots, k)$ とする。ただし，$\phi_0 = f(x)$ とする。

このとき，$\phi_i$ は $p_i+1$ 個の変数の関数であり，$\psi_i$ は $q_i$ 個の変数の関数である。$\phi_{i-1}$ の単分解 $(\phi_i, \psi_i)$ の重複度を $r_i$ とすれば，$\phi_{i-1}$ の変数の個数は $p_{i-1}+1$ であるから，

$$r_i = (p_i + q_i) - (p_{i-1} + 1) \qquad (i=1, 2, \cdots, k) \qquad (1)$$

となる。ここで，$p_0 = n-1$ とする。

この $k$ 個の重複度の和を $r$ とすれば，

$$r = \sum_{i=1}^{k} r_i = \sum_{i=1}^{k} (p_i - p_{i-1}) + \sum_{i=1}^{k} (q_i - 1)$$
$$= p_k - p_0 + \sum_{i=1}^{k} q_i - k \qquad (2)$$

となる。

$p_0 = n-1$ であり，$R \equiv \sum_{i=1}^{k} q_i + p_k + 1$ とおけば，

$$r = R - k - n \qquad (3)$$

をうる。[3]

ここで，$R$ は $f(x)$ の分解 D における成分関数 $\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_k, \phi_k$ のおのおのの変数の個数の和である。(3)式で与えられる $r$ を分解 D の全重複度という。一般に，$f(x)$ の分解 D を単分解の合成として表わす方法は一通りではないが，[3] 上に定義した $r$ は成分関数の変数の個数のみに依存しているので，分解の表わし方には関係しない。

いま，$q \geq 2$ をあるきまった正整数とする。そして，$f(x)$

の分解Dが$q$個の変数をもった$k+1$個の成分関数によって表わされているとする。このとき，$k+1$個の成分関数の変数の個数の和は　$R=q(k+1)$　となる。

したがって，(3)で与えられる全重複度$r$は

$$r=q(k+1)-k-n=(q-1)(k+1)-n+1$$

となる。これより，成分関数の個数$k+1$は

$$k+1=\frac{r}{q-1}+\frac{n-1}{q-1} \tag{4}$$

で与えられる。[4]

3. 単分解と分割行列

[定義4]　$n$変数関数$f(x)=f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$の$X=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$に関するdisjunctiveな分割

$$Y|Z=y_1, y_2, \cdots, y_p \,|\, z_1, z_2, \cdots, z_q$$

に対して，一つの行列をつぎのように対応させる。

すなわち，行数を$m^p$，列数を$m^q$とし，おのおのの順序は$(y_1, y_2, \cdots, y_p)$，$(z_1, z_2, \cdots, z_q)$の$m$進数表示の順とする。また，$m^n$個の$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$に対して，おのおの$(y_1, y_2, \cdots, y_p)$，$(z_1, z_2, \cdots, z_q)$がきまり，行列の一つの要素が対応するが，これは$f(x)$の値とする。このようにしてえられた行列は，その要素が$0, 1, 2, \cdots, m-1$のどれ

かであるが，これを分割行列といい，

$$M(f : Y|Z)$$ と記す。

この行列で，異なった行ベクトルの数を行多重度，異なった列ベクトルの数を列多重度という。

さて，$n$変数関数 $f(x)=f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ の $X=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ についての分割（disjunctive とする）

$$Y|Z = y_1, y_2, \cdots, y_p | z_1, z_2, \cdots z_q$$

を考える。

いま，この分割行列の列多重度 $\nu$ が $\nu \leq m$ であるとする。そして，異なった列を $v_1, v_2, \cdots, v_m$ とする。

このとき，$(z_1, z_2, \cdots, z_q)$ の関数 $\psi(z_1, z_2, \cdots, z_q)$ をつぎのごとく定義する。

すなわち，$v_i$ $(i=1, 2, \cdots, m)$ に対応する $(z_1, z_2, \cdots, z_q)$ に対しては，

$$\psi(z_1, z_2, \cdots, z_q) = a_i \quad (i=1, 2, \cdots, m)$$

とする。

ただし，$a_i$ $(i=1, 2, \cdots, m)$ はすべて異なった $0, 1, 2, \cdots, m-1$ のうちのどれかとする。

さらに，$p+1$ 個の変数の関数 $\phi(y_1, y_2, \cdots, y_p, y_{p+1})$ をつぎのように定義する。

$(y_1, y_2, \cdots, y_p)$ が第 $l$ 番目の行に対応しているとする。

そして，$y_{p+1} = a_i \quad (i=1, 2, \cdots, m)$ ならば，

$\phi = \nu_i$ に相当する列ベクトルの第 $l$ 要素，$(i=1, 2, \cdots, m)$

とする。

ここで，$y_{p+1} = \psi$ とすれば，

$$f(x) = \phi\{y_1, y_2, \cdots, y_p, \psi(z_1, z_2, \cdots, z_q)\}$$

となり，これは明らかに，$f(x)$ の分割 $Y|Z$ に関する単分解である。

異なった列が $m-1$ 個以下の場合も，同様な方法により単分解を作りうることは明らかである。

つぎに，$\nu \geq m+1$ と仮定する。そのうちの任意の異なった $m+1$ 個の列を $\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_m, \nu_{m+1}$ とする。

このとき，各列ベクトルに対応する $(z_1, z_2, \cdots, z_q)$ のうちの一つをそれぞれ，$\eta_i \ (i=1, 2, \cdots, m+1)$ とする。

いま，$m+1$ 個の列のうちの任意の二つ $\nu_j, \nu_k$ を考える。$(j \neq k)$ この二つの列ベクトルの第 $l$ 要素が異なっているような $l$ が少くとも一つは存在するはずである。これを，$a_j, a_k$ とする。

一方，$l$ 番目の行に対応する $(y_1, y_2, \cdots, y_p)$ を $\xi_l$ で表わす。

さて，単分解

$$\phi\{y_1, y_2, \cdots, y_p, \psi(z_1, z_2, \cdots, z_q)\}$$

が存在すると仮定する。

$$\psi(\eta_j) = \psi(\eta_k) \quad \text{とすると,}$$

$$\phi\{\zeta_l, \psi(\eta_j)\} = \phi\{\zeta_l, \psi(\eta_k)\}$$

をうる。ところが,

$$\phi\{\zeta_l, \psi(\eta_j)\} = a_j \neq a_k = \phi\{\zeta_l, \psi(\eta_k)\} \quad .$$

ゆえに, $\psi(\eta_j) \neq \psi(\eta_k)$ .

$\nu_i$ $(i=1, 2, \cdots, m+1)$ のうちの他の任意の二つについても同様な結果をうる。

したがって, $\psi(\eta_1)$, $\psi(\eta_2)$, $\cdots$, $\psi(\eta_{m+1})$ の値はすべて異なった値となる。ところが, $\psi$ は $0, 1, 2, \cdots, m-1$ の $m$ 個の値のどれかであるゆえに矛盾をうる。

以上の結果より, Ashenhurst, Hu ら(1), (5) による二値論理関数の単分解についての定理の多値論理への拡張としてつぎの定理をうる。

〔定理2〕 $n$ 変数関数 $f(X)$ についての $X=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ の分割 $Y|Z$ の分割行列 $M(f:Y|Z)$ が列多重度 $\nu \leqq m$ をもつならば, $Y|Z$ に関する単分解 $(\phi, \psi)$ が存在する。

また, 列多重度が $\nu \geqq m+1$ ならば, 単分解は存在しない。

ここで, 分割は disjunctive とする。

## 4. “Don't-care” をもつ関数の単分解

$n$ 変数関数 $f(x)$ が “don't-care” をもっているとする。

$X=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ の disjunctive な分割

$$Y \mid Z = y_1, y_2, \cdots, y_p \mid z_1, z_2, \cdots, z_q$$

を考える。このとき，分割行列 $M(f: Y \mid Z)$ はつぎのごとく定義する。

すなわち，$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ が $f(x)$ に対する “don't-care point” ならば，それに対応する行列の要素は * にしておく。“don't-care” でない場合の定義は前節における定義と同じ。

また，$(z_1, z_2, \cdots, z_q)$ の関数 $\psi(z_1, z_2, \cdots, z_q)$ と，$(y_1, y_2, \cdots, y_p, \psi)$ の関数 $\phi(y_1, y_2, \cdots, y_p, \psi)$ に対して，

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \phi\{y_1, y_2, \cdots, y_p, \psi(z_1, z_2, \cdots, z_q)\}$$

が，“don't-care” でない $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ において成立しているとき，これを $f(x)$ の単分解といい，$(\phi, \psi)$ と記す。

いま，分割行列 $M(f: Y \mid Z)$ の * に対して，適当な値（$0, 1, 2, \cdots, m-1$ のうちのどれか）を代入することによつて，列多重度 $\nu$ を $\nu \leqq m$ とすることができれば，（このようにしてできた分割行列を $M'$ と記す。）この分割行列 $M'$ に対応する関数 $g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ を考えることができる。定理2より，明らかに $g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ は単分解 $(\phi, \psi)$ をもつ。

また，この $g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ は “don't-care” 以外の点では，

明らかに

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

であるから，$(\phi, \psi)$ は $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ の単分解を与える。

これを定理として，つぎに述べておく。

[定理3] "don't-care" をもつ関数 $f(x)$ に対しては，分割行列 $M'$ の列多重度 $\nu$ を $\nu \leq m$ とすることができれば，$f(x)$ は単分解をもつ。

## 5. Disjunctive でない分割による単分解

$n$ 変数関数 $f(x)$ の $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ に関する分割

$$Y \mid Z = y_1, y_2, \cdots, y_p \mid z_1, z_2, \cdots, z_q$$

の重複度を $r$ とする。

$$r = p + q - n$$

$p+q$ 個の変数 $(y_1, y_2, \cdots, y_p, z_1, z_2, \cdots, z_q)$ は $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ がきまると，これに対応してきまる。

ゆえに，関数 $\lambda(x)$ を

$$\lambda(x) : x \longrightarrow (y_1, y_2, \cdots, y_p, z_1, z_2, \cdots, z_q)$$

で定義する。

ここで，$v = (y_1, y_2, \cdots, y_p, z_1, z_2, \cdots, z_q)$ の関数 $g(v)$ を考える。

まず，$g(v)$ の "don't-care point" は

(1) $v=(y_1, y_2, \cdots, y_p, z_1, z_2, \cdots, z_q)$ が $\wedge(x)$ に含まれないとき。

(2) $f(x)$ 自身がすでに "don't-care" である点 $x$ に対応する $v=(y_1, y_2, \cdots, y_p, z_1, z_2, \cdots, z_q)$。

として定義する。

そして、これら以外の点では

$$g(y_1, y_2, \cdots, y_p, z_1, z_2, \cdots, z_q)=f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

とする。

このとき、$Y|Z$ なる分割は $V=\{y_1, y_2, \cdots, y_p, z_1, z_2, \cdots, z_q\}$ に関する disjunctive な分割である。したがって、もし、$g(v)$ について、分割 $Y|Z$ に関する単分解が存在すれば、$f(x)$ について分割 $Y|Z$ に関する単分解が存在することになる。$g(v)$ についての単分解を見出すことは前節の問題と同じである。

## 6. しきい値回路網への応用

ここでは、前節までの単分解についての結果を利用して、三値しきい値素子の回路網によって、任意の三値論理関数を実現することを考える。これは、与えられた関数に対して、その成分関数がすべてしきい値関数であるような分解を与えることである。

ここで，三値しきい値関数の定義を与えておく。

［定義５］ $n$変数の三値論理関数 $f(x) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ において，

$$
\begin{aligned}
w(x) &\geq T_2 && \text{ならば} \quad f(x) = 2 \\
T_2 > w(x) &> T_0 && \text{ならば} \quad f(x) = 1 \qquad (5) \\
T_0 &\geq w(x) && \text{ならば} \quad f(x) = 0
\end{aligned}
$$

となるような実定数 $w_1, w_2, \cdots, w_n$，$T_2$，$T_0$ $(T_2 > T_0)$ が存在するとき $f(x)$ を三値しきい値関数という。

ただし，$w(x) = w_1x_1 + w_2x_2 + \cdots + w_nx_n$ であり，$w_i$ を重み，$T_2$，$T_0$をしきい値という。

以下，つぎのような問題を考える。

$g \geq 2$ なる正整数$g$を与えて，すべての成分関数の変数の個数が$g$であり，かつ，すべての成分関数がしきい値関数であるような，与えられた関数 $f(x)$ の分解を求める。しかも，成分関数の個数が最小となるようにする。これを $f(x)$ のしきい値関数による最小回路網実現ということにする。

$f(x)$ を単分解の合成として表わしたとき，(4)式より，成分関数の個数を $\zeta(D)$ とすると

$$\zeta(D) = \frac{r}{g-1} + \frac{n-1}{g-1}$$

である。

いま，$f(x)$ のしきい値関数を成分関数（変数の数 $g$）とする分解 $D_0$ と $D$ があったとする。おのおのの場合の全重複度を $r(D_0)$，$r(D)$ とする。

$S$ の表示より，$r(D) \geq r(D_0)$ なるとき，

明らかに，$S(D) \geq S(D_0)$ となる。

［定理1］により，もし $f(x)$ の分解がえられると，これと同じ成分関数を用いた単分解の合成により，この分解を表わしうる。したがって，$f(x)$ のしきい値関数による分解をうるには，変数の数 $g$ を与えて，これによる単分解を作成する過程を続け，全重複度 $r$ を最小にする分解をうると，これが $f(x)$ のしきい値関数による最小回路網実現となる。

以下に実現の手順を述べる。

三値 $n$ 変数論理関数 $f(x)$ と成分関数の変数の数 $g$ が与えられているとする。

(1) $p = n - g = 0$ ならば，与えられた関数 $f(x)$ 自身がしきい値関数であるかどうかを判定する。*

(2) $n > g$ ならば，まず $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ に対して，disjunctive な分割

* 判定の手法については文献 (6) を参照

$$Y \mid Z = y_1, y_2, \cdots, y_p \mid z_1, z_2, \cdots, z_g$$

を考える。このような分割をすべて考えて，

$$Y_1 \mid Z_1, \quad Y_2 \mid Z_2, \cdots, \quad Y_\ell \mid Z_\ell \qquad \text{とする。}$$

最初の分割から単分解が存在するかどうかを調べる。

$Y_1 \mid Z_1$ の分割行列を作り，列多重度 $\nu$ が $\nu \leqq 3$ かどうかを調べる。$\nu \leqq 3$ ならば，定理2より単分解が存在する。もし，$\nu \geqq 4$ ならば，単分解は存在しないので，つぎの分割 $Y_2 \mid Z_2$ にうつる。このようにして，いま $i$ 番目の分割 $Y_i \mid Z_i$ を調べているとする。分割行列の列多重度 $\nu$ が $\nu \leqq 3$ であるとする。すべての可能な単分解を作り

$$(\phi, \psi)_{i,1}, \quad (\phi, \psi)_{i,2}, \cdots, \quad (\phi, \psi)_{i,m}$$

とする。

(3)　(2) でえた単分解について，最初のものから $\psi$ がしきい値関数かどうかを調べる。もし，しきい値関数でなければ，つぎの単分解 $(\phi, \psi)_{i,2}$ にうつる。すべての単分解について $\psi$ がしきい値関数でなければ，(2) におけるつぎの分割 $Y_{i+1} \mid Z_{i+1}$ にうつる。

いま，$(\phi, \psi)_{i,j}$ について調べているとする。そして，この $\psi$ がしきい値関数であるとする。

このとき，$\phi$ は $p+1$ 個の変数の関数であるが，つぎの二つの場合を考えうる。

(i)　$p+1 \leqq q$　　　(ii)　$p+1 > q$

(i) の場合

$\phi$もまた，しきい値関数であるかどうかを調べる。もしそうでなければ，つぎの単分解 $(\phi,\ \psi)_{i,j+1}$ にうつる。

いま，$\phi$がしきい値関数であるとする。

$p+1=q$ のときは，この単分解 $(\phi,\ \psi)_{i,j}$ が $f(x)$ の最小回路実現を与える。

また，$p+1<q$ の場合には，すべての成分関数の変数の個数を$q$とするために，以下のごとく考えればよい。

$y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_p,\ y_{p+1}$ の後に，$y_{p+2},\ y_{p+3},\ \cdots,\ y_q$ までの変数を考え，かつすべて$y_{p+1}$に等しくしておく。

すなわち，$q$変数の関数

$$\phi(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_p,\ y_{p+1},\ y_{p+2},\ \cdots;\ y_q)$$

を考える。ただし，$y_{p+1}=y_{p+2}=\cdots=y_q$

さて，しきい値関数 $\phi(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_p,\ y_{p+1})$ の重みを $w_1,\ w_2,\ \cdots,\ w_p,\ w_{p+1}$ とする。

これに対して，

$$w_1=w_1',\quad w_2=w_2',\quad \cdots,\quad w_p=w_p'$$

$$w_{p+1}=w_{p+1}'+w_{p+2}'+\cdots+w_q'$$

となるような $w_1',\ w_2',\ \cdots,\ w_p',\ w_{p+1}',\ \cdots,\ w_q'$ を考える。

このとき，

$$\sum_{i=1}^{q} w_i' y_i = \sum_{i=1}^{p} w_i' y_i + w_{p+1}' y_{p+1} + w_{p+2}' y_{p+2} + \cdots + w_q' y_q$$

$$= \sum_{i=1}^{p} w_i y_i + (w_{p+1}' + w_{p+2}' + \cdots + w_q') y_{p+1}$$

$$= \sum_{i=1}^{p} w_i y_i + w_{p+1} y_{p+1} = \sum_{i=1}^{p+1} w_i y_i$$

をうるので，$q$ 変数関数 $\phi(y_1, y_2, \cdots, y_{p+1}, \cdots, y_q)$ は $\phi(y_1, y_2, \cdots, y_p, y_{p+1})$ と同様にしきい値関数となる。

このように，変数を $q$ 個にした $\phi$ を用いた単分解 $(\phi, \psi)_{i,j}$ が $f(x)$ の最小回路実現を与える.

(ii) の場合

$\phi$ は $p+1$ 個の変数の関数であるから (2) 以下の手順で，$n$ を $p+1$ でおきかえ，同じ操作を行う。

(4) 全重複度 $r$ が最小のとき最小回路実現を与えるから，成分関数がしきい値関数である単分解のうち，$r$ が最小となるようなものを求めて，それらの合成で $f(x)$ を表わすとよい。したがって，(3) までの手順で，すべて disjunctive な分割ばかりで単分解が求まるとそれが最小回路網実現を与える。いまもし，disjunctive な分割のすべてについて，しきい値関数による単分解が存在しなければ，重複度が 1 である分割について考える。この分割行列については，4，5 で述べたごとく，＊の所に 0 or 1 or 2 を代入することによって，列多重度 $\nu$ を $\nu \leq 3$ とすることができると，単分解が存在す

るので，それらを求めて，(2)，(3)の手順と同様な操作を行う。

なお，定理2の証明から明らかであるが，$\nu \leq 3$の場合に単分解を求めるとき，その成分関数の決め方は必ずしも一意的でない。ゆえに，一つの分割に対して単分解が二つ以上存在する場合があるが，このとき，成分関数がしきい値関数となるような場合が二通り以上存在するかも知れない。このときは，それらをすべて求めて，全重複度$\gamma$が最小となる分解を求めることが必要である。

(5) 重複度が1である単分解の合成で最小回路網実現がえられないときは，これを2，3，…として，これまでと同様な操作をくりかえす。

しきい値関数系は完全系であるから，[7] 必ず有限回で，この手順は完了し，最小回路網実現がえられる。

## 7. 例　題

しきい値回路網実現の手順の説明のために，いくつかの例題を考える。

(1) $f(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2 = \max(x_1, x_2)$ を考える。(Table I)

$g = 2$ とする。$f(x_1, x_2)$自身は明らかにしきい値関数でない。したがって，まず重複度$\gamma = 1$の分割 $x_1 | x_1, x_2$ を考

える。

| $x_1 \vee x_2$ | $x_2$: 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $x_1$: 0 | 0 | 1 | 2 |
| 1 | 1 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | 2 | 2 |

Table I

分割 $x_1 | x_1, x_2$ の分割行列はつぎの通りである。

| $x_1$ \ $x_1 x_2$ | 00 | 01 | 02 | 10 | 11 | 12 | 20 | 21 | 22 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 | * | * | * | * | * | * |
| 1 | * | * | * | 1 | 1 | 2 | * | * | * |
| 2 | * | * | * | * | * | * | 2 | 2 | 2 |

いまこの行列の * に対して，つぎのように値を代入する。

| $x_1$ \ $x_1 x_2$ | 00 | 01 | 02 | 10 | 11 | 12 | 20 | 21 | 22 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |

すると，列多重度 $\nu = 3$ となる。そして，$\psi = \psi(x_1, x_2)$ なる成分関数として第1行によって定義されるものをえらぶ (Fig. 2)。

この $\psi$ は明らかにしきい値関数である。たとえば，重み

$w_1=-1,\quad w_2=1$, しきい値 $T_2=2$, $T_0=0$ とすればよい。

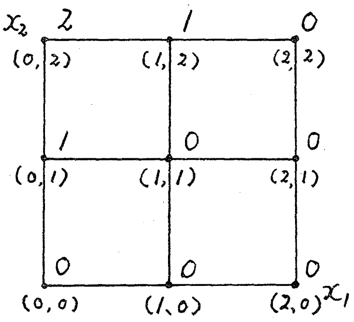

Fig. 2 $\psi(x_1, x_2)$

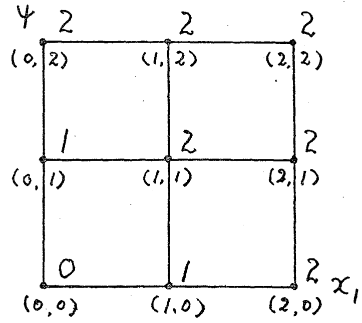

Fig. 3 $\phi(x_1, \psi)$

これで単分解 $f=(\phi, \psi)=\phi(x_1, \psi(x_1, x_2))$ をうるが，$\phi$ は Fig.3. のようになり，たとえば，$x_1$ の重み $w_1=1$，$\psi$ の重み $w_2=1$，しきい値 $T_2=2$，$T_0=0$ として，しきい値関数となる。したがって，$f(x_1, x_2)$ の回路実現は Fig. 4 となる。

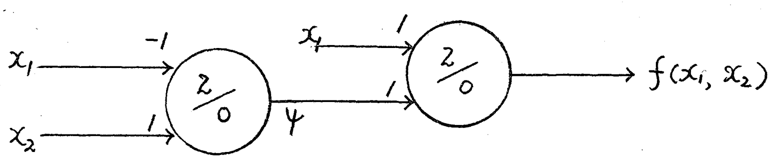

Fig. 4

これが最小回路網実現であることは明らかである。この例は三値論理和といわれるものの実現であるが，すでに相原らによって具体的なしきい値素子実現が与えられている。[8]

いまえられたものは，素子の数はこれと同じであるが，入力の接続数が一つ少なくてすむ。

(2) $f(x_1, x_2)$ として三値 NAND[9] といわれるつぎのものも考える。(Table 2)

| NAND | $x_2$: 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| $x_1$ 1 | 1 | 2 | 2 |
| 2 | 1 | 2 | 0 |

Table 2

$g=2$とする。

$f(x_1, x_2)$は明らかにしきい値関数でない。

$r=1$の分割 $x_1 | x_1 x_2$ を考える。

分割行列はつぎの通りである。

| $x_1$ \ $x_1x_2$ | 00 | 01 | 02 | 10 | 11 | 12 | 20 | 21 | 22 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1 | * | * | * | * | * | * |
| 1 | * | * | * | 1 | 2 | 2 | * | * | * |
| 2 | * | * | * | * | * | * | 1 | 2 | 0 |

いま，$\psi(x_1, x_2)$としてFig. 5のようなものを考えると，これはしきい値関数である。

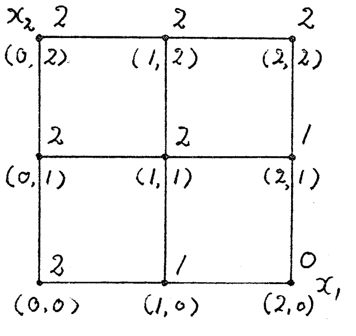


Fig. 5

ところが，行列の第3行の要素が1，2，0の順序になっているので，$\phi(x_1, \psi)$を作ると，$\phi$はunateでない。したがって，しきい値関数となりえない。(6)

つぎに，$r=2$の分割 $x_1 x_2 | x_1 x_2$ を考える。

分割行列は対角要素のみが

$$(1, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 2, 0)$$

で，他はすべて*である。

この*に対して，つぎのごとく値を代入すると $\nu = 2$ となる。

| $x_1x_2$ \ $x_1x_2$ | 00 | 01 | 02 | 10 | 11 | 12 | 20 | 21 | 22 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 01 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | * |
| 02 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | * |
| 10 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | * |
| 11 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | * |
| 12 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | * |
| 20 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | * |
| 21 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | * |
| 22 | * | * | * | * | * | * | * | * | 0 |

この行列の第1行でもって $\psi_1 = \psi_1(x_1, x_2)$ を定義すると，$\psi_1$ はつぎのごとき重み，しきい値でもってしきい値関数となる。 $w_1 = -1$, $w_2 = -1$, $T_2 = 1$, $T_0 = -4$

これで単分解 $(\phi_1, \psi_1) = \phi_1(x_1, x_2, \psi_1(x_1, x_2))$ をうる。

ここで，$(x_1, x_2, \psi_1)$ に関する分割

$$x_1 \mid x_2\, \psi_1 \quad (\text{disjunctive})$$

を考える。

分割行列はつぎの通りである。

| $x_1$ \ $x_2 y_1$ | 00 | 01 | 02 | 10 | 11 | 12 | 20 | 21 | 22 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | * | * | 1 | * | * | 1 | * |
| 1 | * | 1 | * | * | 2 | * | * | 2 | * |
| 2 | * | 1 | * | * | 2 | * | 0 | * | * |

行列の*に対してつぎのごとく値を代入する。

| $x_1$ \ $x_2 y_1$ | 00 | 01 | 02 | 10 | 11 | 12 | 20 | 21 | 22 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 2 | 0 | 2 | 2 | 0 | 2 | 2 |
| 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 2 | 2 | 0 | 2 | 2 |

明らかに列多重度 $\nu = 3$ となる。第3行でもって $y_2(x_2, y_1)$ を定義すると $y_2$ はつぎのごとくなる。

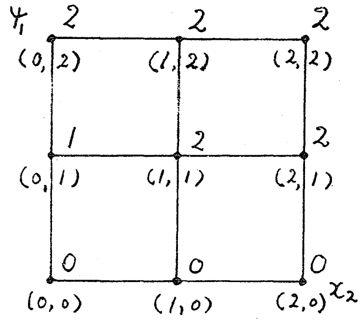

Fig. 6

これは、たとえば、

$w_1 = 1$ （$x_2$ の重み）

$w_2 = 4$ （$y_1$ の重み）

$T_2 = 5$, $T_0 = 2$

としてしきい値関数である。

また、単分解 $\phi_2(x_1, y_2)$ はつぎのごとくなる。

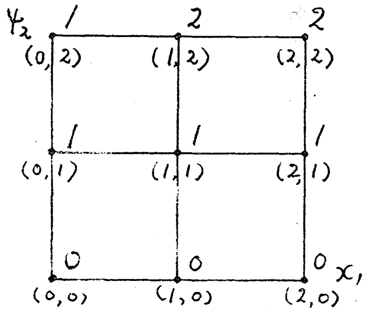

Fig. 7

したがって、$\phi_2$ は

$w_1 = 1$, $w_2 = 4$

$T_2 = 9$, $T_0 = 2$

としてしきい値関数となる。

ゆえに，

$$f(x_1, x_2) = \phi_2 \left[ x_1,\ \psi_2 \{ x_2,\ \psi_1 (x_1, x_2) \} \right]$$

なる分解をうる。回路実現はつぎの通りである。

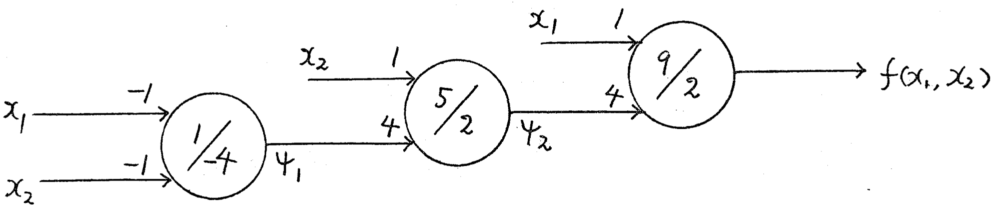


Fig. 8

しきい値素子の個数 $S(D)$ は (4) 式より

$$S(D) = r + 1$$

であるが，最初の分割で $r = 1$ の単分解が存在しえなかったので，$S(D) = 3$ が最小実現である。

したがって，いまえられた回路実現は，最小回路網実現である。

(3)　3変数関数 $f(x_1, x_2, x_3)$ として，つぎのものを考える。

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $f$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $f$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $f$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 2 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 |
| 0 | 0 | 2 | 1 | 1 | 0 | 2 | 1 | 2 | 0 | 2 | 2 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 2 | 1 | 0 | 2 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 |
| 0 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 |

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 2 | 0 | 2 | 1 | 2 | 0 | 2 | 2 | 2 | 0 | 2 |
| 0 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 |
| 0 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |

Table 3

$\ell = 2$ とする。重複度 $= 0$ の分割は

$$x_1 \mid x_2 x_3 \quad , \quad x_2 \mid x_1 x_3 \quad , \quad x_3 \mid x_1 x_2$$

の三つ存在するが，まず，$x_1 \mid x_2 x_3$ を考える。

分割行列はつぎの通りである。

| $x_1$ \ $x_2 x_3$ | 00 | 01 | 02 | 10 | 11 | 12 | 20 | 21 | 22 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |

列多重度 $\nu = 3$ である。いま，$\psi(x_2, x_3)$ として第1行をえらぶ。(Fig. 9)

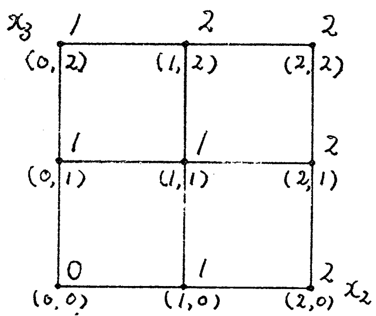


Fig. 9 $\psi(x_2, x_3)$

この $\psi(x_2, x_3)$ はたとえば，

$w_1 = 2$ （$x_2$ の重み）

$w_2 = 1$ （$x_3$ の重み）

$T_2 = 4, \quad T_0 = 0$

としてしきい値関数である。

このとき，単分解 $(\phi, \psi)$ は $\phi(x_1, \psi(x_2, x_3))$ となるが，これはつぎのごとくなる。(Fig. 10)

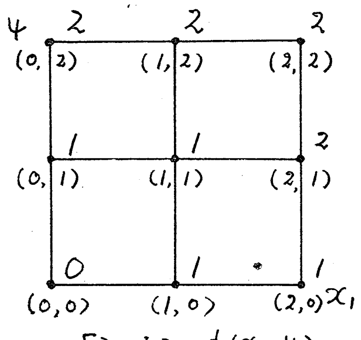


Fig. 10 $\phi(x_1, 4)$

これは，たとえば

$w_1 = 1$,　$w_2 = 2$

$T_2 = 4$,　$T_0 = 0$

としてしきい値関数である。

回路実現はつぎの通りである。

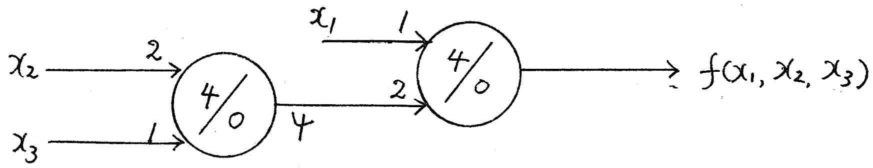


Fig. 11

しきい値素子の個数 $\zeta(D)$ は (4) において，$n=3$，$q=2$ を代入して

$$\zeta(D) = r + 2 \geq 2$$

ゆえに，2個の素子による実現は，明らかに最小回路網実現を与える。

謝　辞

本報告について，種々有益なる助言をいただいた京都大学工学部数理工学教室長谷川利治助教授，同茨木俊秀博士に深く感謝する。

（付記）本報告の講演予稿原稿を提出した後に，本論文の

［定理2］と同様なものが文献(11)にも発表されている事を見出した。しかし、本報の定理はこれとは全く独立にえられたものである。

## 文　　献


(1) S. T. Hu : "On the decomposition of switching functions", Lockheed Missiles and Space Division, Technical Report, 6-90-61-15 (June, 1961)

(2) S. T. Hu : Threshold Logic, pp. 274-276, University of California Press (1965)

(3) ibid. p. 277

(4) ibid. p. 278

(5) ibid. p. 283

(6) 三根 久, 藤田志郎 : "三値しきい値関数の判定と実現について" 信学論(C), 53-C, 7, pp. 439-446 (昭45-07)

(7) 藤田, 北橋, 田中 : "多値しきい値論理関数系の完全性" 信学論(C), 53-C, 5, pp. 341-342 (昭45-05)

(8) 相原恒博, 片岡正次郎 : "しきい素子による三値論理和(積)ゲートの実現法" 信学論(C), 52-C, 2,

pp. 122－123 （昭44－02）
(9) 田中末雄，田原道夫："三値論理関数の完全性とPolypheck" 信学論（C），53－C，2，pp. 111－118（昭45－02）
(10) R. L. Ashenhurst: "The decomposition of switching functions", Annals of the Harvard Computational Laboratory 29, pp. 74－116 (1959)
(11) K. M. Waliuzzaman and Z. G. Vranesic: "On decomposition of multi-valued switching functions" The Computer Journal, vol. 13, No. 4, pp. 359－362 (1970)